INPROFORUM 2011, České Budějovice, ISBN 978-80-7394-315-8

VÝZNAM TEORIE DUALITY V OPERAČNÍ ANALÝZE

THEORY OF DUALITY IN OPERATIONAL ANALYSIS

ZÍSKAL Jan

Abstract

This paper summarizes knowledge from literature and results of research in dual theory at the Department of systems engineering. The area of dual theory is used for solving different economic problems. Diversity of problem in application shows different methods of operation analysis. They are given the possibility of duality use by linear optimization models in solving distribution problems, game theory and network. Very important is economics interpretation of dual problem.

Key words: Duality, dual model, shades prices, dual algorithm, economy interpretation.

JEL Classification: C 61

Abstrakt

Příspěvek shrnuje poznatky získané studiem odborné literatury a výsledky výzkumné činnosti na katedře Systémového inženýrství v oblasti využívání teorie duality při řešení různých ekonomických úloh. Ukazuje na různorodost dané problematiky při aplikaci jednotlivých metod operační analýzy. Jsou uvedeny možnosti využití duality při použití lineárních optimalizačních modelů, při řešení distribučních úloh, v teorii her a v teorii toků v sítích. Je zdůrazněna ekonomická interpretace duálních úloh.

Klíčová slova: dualita, duální model, stínové ceny, duální algoritmy, ekonomická interpretace

Úvod

Dualita (podvojnost) se stala fenoménem operační analýzy. Její využití nesmírně rozšířilo interpretační možnosti úloh operační analýzy. V matematice a fyzice se v prostorech řešení setkáváme se dvěma vzájemně souvisejícími prostory. V případě konstrukce lineárního ekonomicko matematického modelu nezávisle vzniká v duálním prostoru jeho druhá verze. Tato duální verze má svoji zajímavou ekonomickou interpretaci, což zvyšuje poznávací bázi řešitele. Pojem duální úlohy zavedl John von Neumann v roce 1947 (Neumann 1947) a vyskytuje se též v práci V. Kantoroviče z roku 1949 (Kantorovič-Gavurin 1949). Od té doby se dualita stala nedílnou součástí mnoha prací různých autorů v oblasti operační a systémové analýza (Tucker 1956, Dantzig 1956, Získal 1998 a další).

Cíl a metodika

Cílem tohoto příspěvku je ukázat na využití duality v různých disciplínách operační analýzy. Její význam v jednotlivých úlohách může být výpočetní, kdy umožňuje zjednodušení a urychlení výpočtů, analytický, kdy se využívá při zkoumání vlastností úloh, pro odvozování důkazů a algoritmů a ekonomický význam spočívající v možnosti oceňovat výrobní činitele. Zejména ekonomický význam duality rozšiřuje možnosti interpretace a analýzy získaných výsledků řešení a tím umožňuje získání velkého množství informací potřebných pro správné rozhodování.

Tomuto cíli je přizpůsobena metodika řešení, která vychází jednak ze systémového přístupu a z předpokladu vzájemné propojenosti a návaznosti jednotlivých disciplín systémové analýzy. Metodologie zpracování tak vychází z povahy dané problematiky. Využívá teoretických a praktických poznatků získaných dlouholetým studiem této problematiky, z vlastních zkušeností z výzkumné činnosti a z poznatků vyplývajících z výsledků výuky předmětů katedry Systémového inženýrství.

Výsledky a diskuse

Teorie duality se nejvíce uplatnila při aplikacích lineárních optimalizačních modelů. Uvedeme obecnou formulaci primárního lineárního modelu:

$$\begin{aligned} A_1x_1 + A_2x_2 &\le b_1 \\ A_3x_1 + A_4x_2 &= b_2 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &- s.l \\ z = c_1^T x_1 + c_2^T x_2 &(\max) \end{aligned} \qquad (1)$$

K tomuto modelu je duální model formulován takto:

$$\begin{aligned} y_1^T A_1 + y_2^T A_3 &\ge c_1^T \\ y_1^T A_2 + y_2^T A_4 &= c_2^T \\ y_1^T &\ge 0 \\ y_2^T &- s.l. \\ f = y_1^T b_1 + y_2^T b_2 &(\min) \end{aligned} \qquad (2)$$

Kde $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ je matice koeficientů u proměnných

x_j jsou proměnné primární úlohy

y_i jsou proměnné duální úlohy

b je vektor požadavků

c^T je vektor cen

z je primární kriteriální funkce

f je duální kriteriální funkce

Podle explicitní věty o dualitě (Gale, Kun, Tucker 1951) známe-li optimální řešení obou sdružených problémů (1) a (2), pak duální hodnoty y_i udávají přírůstek hodnoty kriteriální funkce při jednotkovém přírůstku pravých stran vlastních omezení primární úlohy.

Ekonomický význam duálních proměnných y_i spočívá v tom, že poskytují ocenění vlastních omezení primárního modelu vzhledem k primární kriteriální funkci. Protože někdy bývá interpretace duální úlohy a tedy i duálních proměnných dosti obtížná, je vhodné v těchto případech zkoumat fyzikální rozměr na obou stranách omezení duálního problému a tak dospět ke správné interpretaci (館Získal, Houška, Beránková 2005).

Pomocí maticové symboliky lze duální (stínové) ceny vyjádřit jako vektor:

$$d = c_B^T B^{-1} A - c^T \quad a \quad c_B^T B^{-1} \tag{3}$$

kde c_B^T je vektor cen základních proměnných

B^{-1} je matice transformace

A je matice soustavy

Protože duální báze zůstává optimální jen v určitém rozmezí, které lze zjistit pomocí analýzy citlivosti (Získal a kol. 2007) je ocenění výrobních činitelů relativní a je závislé na jejich množství. Se změnou množství činitelů přes dané intervaly přípustných změn se mění i optimální báze a tím i duální ceny. Duální ceny udávají, jak zvýší každá další jednotka příslušného činitele maximální výnos. Má-li v optimálním řešení některá proměnná nenulovou hodnotu, je duální omezení jí odpovídající splněno jako rovnost a je-li některé omezení primáru splněno v optimálním řešení jako ostrá nerovnost, rovná se odpovídající duální proměnná nule. To znamená, že činitelé, které jsou v přebytku, mají v optimálním řešení nulovou duální cenu a nerentabilní procesy se v optimálním řešení nerealizují.

Duální hodnoty tedy signalizují možné změny v dosažení cíle při určité změně omezujících podmínek primární úlohy. To má značný význam pro manažerské rozhodování. O kolik se prakticky může změnit hodnota kriteriální funkce záleží ovšem na celé struktuře úlohy. Rozevírání příslušného úzkého profilu ve výrobě přestane mít v určitém okamžiku smysl, protože se limitujícím činitelem stane jiný zdroj.

Ekonomický význam duálních cen spočívá především v tom, že lze hodnotit úsporu některého výrobního činitele, výhodnost zavedení nového výrobku, výhodnost substituce jednoho výrobního faktoru jiným apod. (Vrána 1966).

Dualita se uplatnila též při odvozování nových algoritmů. Příkladem je duální simplexová metoda (Dantzig, Laster 1956), která byla odvozena pro řešení některých typů lineárních úloh, kdy nejsou splněny všechny předpoklady pro jejich řešení. Zejména jde o předpoklad nezápornosti omezujícího vektoru **b** primární úlohy. Metoda vychází z přípustného duálního řešení a nepřípustného primárního řešení, které se iteračním postupem transformuje na přípustné při zachování přípustnosti duálního řešení.

U distribučních úloh se využívá duality při stanovení testu optimality v primární úloze. K jednostupňovému dopravnímu problému lze duální úlohu formulovat takto:

$$u_i + v_j \le c_{ij} \left(i = 1,2 \dots m; j = 1,2 \dots n\right)$$

$$f = \sum_i a_i v_i + \sum_j b_j v_j \left(\max\right) \tag{4}$$

Kde u_i jsou duální proměnné odpovídající m řádkovým omezením primární úlohy

v_j jsou duální proměnné odpovídající n sloupcovým omezením primární úlohy

a_i jsou kapacity dodavatelů

b_j jsou požadavky spotřebitelů

c_{ij} jsou ceny za přepravu

V případě, že duální proměnné u_i a v_j vyhovují omezujícím podmínkám duální úlohy (4), je příslušné bazické řešení optimální.

Z ekonomického hlediska duální proměnné udávají náklady na jednotku kapacity dané dodavatelské nebo spotřebitelské stanice, čili udávají, jak se každá jednotka kapacity určité stanice podílí na přepravních nákladech. Velká hodnota u_i znamená, že i-tá dodavatelská stanice je dopravně nevhodně umístěna vůči spotřebitelským stanicím a naopak vysoká hodnota v_j znamená nevhodné umístění spotřebitelské stanice vůči dodavatelské. Tyto poznatky mohou vést k případné úpravě dopravních tras. Duální proměnné u_i a v_j udávají jen relativní ocenění dodavatelských a odběratelských stanic, neboť se změnou bazického řešení se mění jejich hodnoty.

Dualita se uplatnila i v dalších disciplínách operační analýzy. Mezi teorii her a lineárním programováním existuje velmi úzký vztah. Optimální smíšenou strategii maticové hry lze nalézt pomocí převodu na úlohu lineárního programování (LP) a naopak každou duální dvojici úloh LP lze redukovat na symetrickou hru.

Můžeme formulovat úlohu:

$$z \to \max$$
$$x^T A \geq v \qquad (5)$$
$$\sum_i x_i = 1$$

a k ní duální

$$f \to \min$$
$$A_y \leq v \qquad (6)$$
$$\sum_j y_j = 1$$

kde A je výplatní matice hry
x je smíšená strategie hráče A
y je smíšená strategie hráče B
v je cena hry

Jestliže hráč A předpokládá, že jeho smíšenou strategii zná hráč B, pak každý z nich řeší lineární úlohu, která je duálem druhého hráče.

Známe-li optimální smíšenou strategii maticové hry, lze přímo rozhodnout o řešitelnosti dané úlohy. V teorii her se důkaz věty o minimaxu, tj.

$$\max_i \min_j E(x, y) = \min_j \max_i (x, y)$$

kde E (x, y) je střední hodnota výhry

opírá o teorii duality (Neumann 1947). Minimaxový princip lze uplatnit při řešení problémů ekonomického rozhodování za neurčitosti nebo při vyhledávání kompromisních řešení v úlohách vícekriteriální optimalizace.

Mnohé praktické problémy se zabývají problematikou komunikačních sítí. Existuje celá řada ekonomických úloh, kdy se vyhledává kolik substrátu může projít danou sítí za časovou jednotku nebo jak optimálně řídit pohyb v síti, jaká minimální kapacita sítě stačí k přepravě daného objemu substrátu atp.

Vyhledávání maximálního toku v síti lze provést pomocí FF algoritmu (Ford Fullkerson, 1954). Také lze ale použít jiný způsob založený na jiném algoritmu vyhledávání minimální kapacity řezu sítí. Jde o vzájemný duální vztah dvou úloh.

Závěr

Dualita v operační analýze sehrála důležitou roli. Uplatnila se při řešení různých úloh nejen v analytické a ekonomické oblasti, ale i výpočetní. Její použití nesmírně rozšířilo informační bázi pro rozhodování. I když je teorie duality v odborné literatuře poměrně široce rozpracovaná, stále evokuje pro úvahy o dalším jejím možném využití.

Literatura

[1] DANTZIG, G.B., LASTER, R. 1956, Primal-Dual Algorithm for Linear Programs, *Annals of Mathematics Study*, n. 38, Princeton.

[2] DANTZIG, G.B., 1966. *Lineárne programovanie a jeho rozvoj*. Slov. vyd. technické literatury, Bratislava.

[3] FORD, L.R., FULKERSON, R,D. 1954. *Maximal Flow Through a Network*, Research Memorandum RM-1400, The Rand Corporation.

[4] GATE, D., KUHN, H.W., TUCKER, W. 1951. *Linear Programming and the Theory of Games*. John Wiley, New York.

[5] KANTOROVIČ, L.V., GAVURIN, M.K. 1949. *The Application of Mathematical Methods to Problems of Freight Flows Analysis*, Akademie nauk SSSR.

[6] NEUMANN, J. 1947. *On a Maximization Problem*. Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.

[7] TUCKER, A.W. 1956. Dual Systems of Homogeneous Linear Relation. *Annals of Mathematics Study*, č. 38, Princeton.

[8] VRÁNA, L. 1966. Orientační model výroby. Studijní informace, *Zemědělská ekonomika*, Praha.

[9] ZÍSKAL, J. a kol. 2007. *Lineární programování III*, ČZU v Praze, PEF, ISBN 978-80-213-1397-2.

[10] ZÍSKAL, J. 1998. *Systémová analýza a modelování*, ČZU v Praze, PEF, ISBN 80-213-0371-9.

[11] ZÍSKAL, J., HOUŠKA, M., BERÁNKOVÁ, M. 2005. *Lineární programování II.* ČZU v Praze, PEF, ISBN 80-213-1353-6.

Adresa autora:
Prof. Ing. Jan Získal, CSc., Česká zemědělská univerzita, PEF / katedra Systémového inženýrství, Kamýcká 129, 165 21 Praha 6, Česká republika, tel.:224 382 355, e-mail: ziskal@pef.czu.cz